

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
ESCOLA DE ENGENHARIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

LUCIANA GANZAROLI PINHEIRO

**PROCEDIMENTOS PARA AVALIAÇÃO DE FLECHAS EM ELEMENTOS
ESTRUTURAIS DE CONCRETO ARMADO**

PROJETO DE CONCLUSÃO DE CURSO I

Niterói

2020

LUCIANA GANZAROLI PINHEIRO

**PROCEDIMENTOS PARA AVALIAÇÃO DE FLECHAS EM ELEMENTOS
ESTRUTURAIS DE CONCRETO ARMADO**

PROJETO DE CONCLUSÃO DE CURSO I

Projeto de Conclusão de Curso
apresentado ao curso de Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal
Fluminense, como requisito parcial para
conclusão do curso.

Orientadora:

Prof.^a Claudia Maria de Oliveira Campos – Professora Orientadora

Niterói

2020

Ficha Catalográfica – SDC/BEE
<http://www.bibliotecas.uff.br/bee/ficha-catalografica>
Bibliotecária: Sandra Lopes Coelho – CRB7/3389

P654p Pinheiro, Luciana Ganzaroli

Procedimentos para avaliação de flechas em elementos estruturais de concreto armado / Luciana Ganzaroli Pinheiro ; Claudia Maria De Oliveira Campos – Niterói, 2020.

45 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal Fluminense, Escola de Engenharia Niterói, 2020.

1. Flechas. 2. Concreto Armado. 3. Vigas. 4. Produção intelectual. I. Campos, Claudia Maria De Oliveira, orientadora. II. Universidade Federal Fluminense. Escola de Engenharia. III. Título.

CDD -

LUCIANA GANZAROLI PINHEIRO

**PROCEDIMENTOS PARA AVALIAÇÃO DE FLECHAS EM ELEMENTOS
ESTRUTURAIS DE CONCRETO ARMADO**

Trabalho de conclusão de curso
apresentado ao curso de Graduação em
Engenharia Civil da Universidade Federal
Fluminense, como requisito parcial para
conclusão do curso.

Aprovada em 16 de dezembro de 2020.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Claudia Maria de Oliveira Campos (Orientadora) - UFF

Prof. Claudio Ribeiro Carvalho – UFF

Prof. Osvaldo Luiz de Carvalho Souza – UFF

Niterói

2020

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Suely e Antonio Carlos, pela educação que me proporcionaram durante toda minha vida, pelo amor, apoio e recursos que recebi.

À minha família. Em especial à minha irmã, Ana, e à minha avó, Olinda, por todo incentivo e conselhos, quando precisei.

Aos meus amigos, Júlio César, Amanda e João Paulo, pelo carinho, paciência e por sempre estarem ao meu lado e me ajudarem nas dificuldades da vida e da graduação.

À professora e orientadora Claudia Maria de Oliveira Campos, por ter aceitado o convite para me auxiliar no desenvolvimento deste trabalho, pela paciência, incentivo e aprendizados.

RESUMO

Os estudos para avaliar o comportamento das estruturas de concreto armado no estado limite de serviço buscam apresentar métodos de cálculo para que sejam obtidos resultados satisfatórios na estimativa das deformações. No caso da análise de flechas em vigas, existem diversos métodos de aproximação e modelos para se considerar a não linearidade dos materiais. A simplificação adotada pela norma brasileira NBR 6118:2014, baseado no método de Branson (1965), apresenta na literatura resultados razoáveis quando são estudadas vigas dentro de determinadas condições de carregamento, tipo de apoio e taxas de armadura. O mesmo método servia de base para as edições anteriores da ACI 318, norma americana. Na nova atualização da ACI, foi adotado o método de Bischoff (2005, 2007, 2020). Sendo assim, torna-se necessário melhor compreensão pela aplicação do método de Branson (1965) nas situações em que se podem subestimar resultados experimentais.

O objetivo do trabalho foi o estudo dos métodos propostos que podem ser empregados para o cálculo de flechas em elementos lineares de concreto armado. Em uma comparação inicial, observa-se que a abordagem adotada no método proposto por Bischoff (2005, 2007, 2020) resultou em flechas imediatas com valores mais coerentes quando aplicado no lugar da formulação de Branson (1965). O estudo sugere que a partir de uma base de dados encontrada na literatura, possa-se avaliar de forma mais ampla os métodos, considerando não apenas taxas de armaduras, mas bem como a hiperestaticidade de elementos lineares.

Palavras-chave: flechas, vigas, concreto armado, rigidez à tração.

ABSTRACT

Studies to evaluate the behavior of reinforced concrete structures in the service limit state seek to present calculation methods so that satisfactory results are obtained in the strain estimation. In deflections analysis, there are several methods of approximation and models to consider the non-linearity of the materials. The simplification adopted by the Brazilian code NBR 6118:2014, based on the method of Branson (1965), presents in the literature reasonable results when beams are studied within certain loading conditions, type of support and reinforcement rates. The same method served as the basis for previous editions of ACI 318, the American code. In the new ACI update, the Bischoff method (2005, 2007, 2020) was adopted. Thus, it is necessary to better understand the application of Branson's method in situations in which experimental results can be underestimated.

The objective of the work was the study of the proposed methods that can be used for the calculation of deflections in linear elements of reinforced concrete. In an initial comparison, it is observed that the approach adopted in the method proposed by Bischoff (2005, 2007, 2020) resulted in immediate deflections with more consistent values when applied in place of the Branson's formulation (1965). The study suggests that from a database found in literature, the methods can be more broadly evaluated, considering not only reinforcement rates, but also the hyperstaticity of linear elements.

Keywords: deflections, beams, reinforced concrete, tension stiffening.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Efeito <i>tension stiffening</i> no gráfico carga-deslocamento	15
Figura 2: Modelo de fissuração simplificado para a flexão.....	16
Figura 3: Modelo do efeito <i>tension stiffening</i> resistente à flexão.....	18
Figura 4: Gráfico do efeito da fissuração e da rigidez à tração do concreto	19
Figura 5: Gráfico da comparação de flechas pelos dois métodos	21
Figura 6: Sistema de molas representando o método de Bischoff.....	21
Figura 7: Gráfico das deformações pelo método de Bischoff	22
Figura 8: Sistema de molas representando o método de Branson	23
Figura 9: Componente do efeito <i>tension stiffening</i> aplicado na equação de Branson (1965) ..	23
Figura 10: Gráfico das deformações pelo método de Branson.....	24
Figura 11: Comparação das formulações para elementos moderadamente reforçados.....	24
Figura 12: Comparação das formulações para elementos levemente reforçados.....	25
Figura 13: Valores médios de $f_{i,calc}/f_{i,exp}$ nas vigas armadas com aço.....	33
Figura 14: Comparação entre valores de $f_{i,calc}/f_{i,exp}$ para f_{ck} entre 20MPa e 50MPa.....	34
Figura 15: Comparação entre NBR 6118:2014 e Eurocode 2 (2004)	34
Figura 16: Comparação entre ACI 318-14, Bischoff (2005) e CSA 23.2 (2014).....	35
Figura 17: Geometria e tipo de carregamento das vigas do subgrupo VB-G11.....	37
Figura 18: Gráficos carregamento versus flecha no meio do vão do subgrupo VB-G11.....	38
Figura 19: Gráfico da carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga VB-G113	41
Figura 20: Gráfico da carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga VB-G116	42

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Valores do coeficiente ξ em função do tempo.....	28
Tabela 2: Limites para deslocamentos NBR 6118:2014	29
Tabela 3: Limites para deslocamentos ACI 318.....	31
Tabela 4: Propriedades dos materiais das vigas do grupo VB-G1	36
Tabela 5: Dados do carregamento e armação longitudinal das vigas do subgrupo VB-G11 ...	37
Tabela 6: Diferenças percentuais das flechas em relação ao modelo do Analest (%).....	39
Tabela 7: Dados geométricos da seção das vigas	40
Tabela 8: Parâmetros adotados das vigas do subgrupo VB-G11.....	40

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	<i>American Concrete Institute</i>
CEB	<i>Comite Euro-international du Beton</i>
CNR-DT	<i>Consiglio Nazionale delle Ricerche</i>
CSA	<i>Canadian Standards Association</i>
ELS-DEF	Estado Limite de Deformação
ELU	Estado Limite Último
LN	Linha Neutra
NBR	Norma Brasileira
PRF	Polímeros Reforçados por Fibras

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	13
1.1	Considerações Iniciais	13
1.2	Situação Problema	13
1.3	Objetivos da Pesquisa.....	13
1.3.1	Objetivo Geral.....	13
1.3.2	Objetivos Específicos	14
1.4	Organização da Pesquisa	14
2	REVISÃO DA LITERATURA	15
2.1	Efeito <i>tension stiffening</i>	15
2.2	Análise de deflexões em vigas.....	16
2.2.1	Método de Branson (1965)	17
2.2.2	Método de Bischoff (2005, 2007, 2020).....	18
2.3	Comparações entre os métodos de Branson (1965) e Bischoff (2005, 2007, 2020)	20
2.4	NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto	25
2.5	ACI 318-19 – <i>Building Code Requirements for Structural Concrete</i>	30
3	APLICAÇÃO DOS MÉTODOS SIMPLIFICADOS.....	32
3.1	Estudos realizados	32
3.1.1	Melo (2019)	32
3.1.2	Junges (2011) e Junges e La Rovere (2012).....	35
3.2	Análise de dados: Branson (1965) e Bischoff (2005, 2007, 2020).....	40
4	CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES PARA FUTURAS PESQUISAS	43
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	44

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

Nos projetos de estruturas de concreto armado são realizadas análises a fim de garantir a segurança dos elementos no Estado Limite Último (ELU) e o desempenho desejável no Estado Limite de Serviço (ELS). O ELS é atingido quando a estrutura deixa de se comportar adequadamente, apresentando deformações excessivas, que podem causar problemas como fissuração aparente, fortes vibrações e danos aos elementos, inviabilizando seu uso.

Diante disso, busca-se construir métodos de análise que resultem em valores satisfatórios de deformações. A deflexão excessiva é um dos principais problemas dentro do ELS, assim, deve ser verificada por meio de comparações com os limites estabelecidos pelas normatizações, sendo no Brasil a NBR 6118:2014 e nos Estados Unidos, a ACI 318-19.

1.2 Situação Problema

Devido a evolução dos materiais e técnicas construtivas nos últimos anos, vemos que as estruturas têm se tornado mais esbeltas, com vãos cada vez maiores e mais carregadas. Portanto, torna-se indispensável a verificação do desempenho em serviço das mesmas, a fim de garantir previsões para deflexões e fissuras o mais próximo do que o elemento sofrerá durante sua vida útil. Existem, atualmente, diversos métodos simplificados e modelos matemáticos de elementos finitos para esta determinação, sendo importante a avaliação dos mesmos para maior compreensão do comportamento das estruturas.

1.3 Objetivos da Pesquisa

1.3.1 Objetivo Geral

Considerando a importância da análise estrutural dos elementos, devemos sempre buscar métodos de cálculo mais precisos e confiáveis. Assim, o objetivo deste trabalho é demonstrar a tendência da análise recomendada pela norma brasileira, método de Branson (1965), e da utilizada pela nova versão da norma americana, método de Bischoff (2005, 2007, 2020), para verificações no estado limite de deformações excessivas (ELS-DEF).

1.3.2 Objetivos Específicos

- Apresentar os conceitos teóricos dos métodos de Branson (1965) e Bischoff (2005, 2007, 2020), comparando-os quanto ao cálculo do momento de inércia efetivo;
- Breve análise das tendências dos métodos para taxas de armadura diferentes.

1.4 Organização da Pesquisa

Este trabalho está dividido em dois capítulos, a descrição do que cada um deles aborda está descrita a seguir.

No Capítulo 2 são desenvolvidas as bases teóricas dos métodos de Branson (1965) e de Bischoff (2005, 2007, 2020) utilizadas pelas normas brasileira e americana, respectivamente, para o cálculo de deflexões imediatas em vigas de concreto armado. O capítulo trata também do conceito do efeito *tension stiffening*, que influencia diretamente no cálculo da rigidez dos elementos estruturais fissurados. Além disso, é apresentada uma revisão das considerações das duas normas, assim como os parâmetros adotados na aplicação das fórmulas.

O Capítulo 3 apresenta estudos comparativos já desenvolvidos na literatura a fim de se determinar flechas imediatas, que também utilizam outros procedimentos de análise, como os modelos bilinear, trilinear, além de programas de elementos finitos. Para um estudo inicial do modelo de Bischoff (2005, 2007, 2020), foi feita uma comparação com o método utilizado na norma brasileira, aplicando as formulações para vigas estudadas anteriormente.

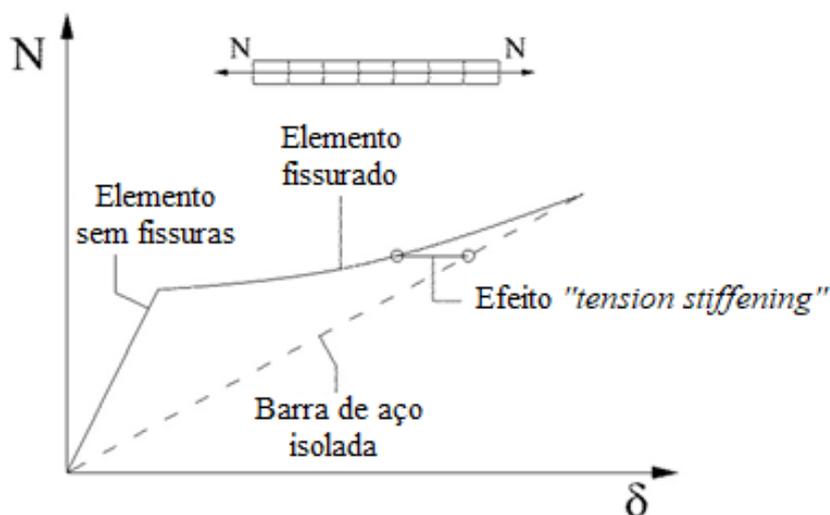
2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Efeito *tension stiffening*

Os elementos de concreto armado apresentam comportamento não linear, o que se deve principalmente pela relação tensão-deformação dos materiais em conjunto. Sendo assim, são consideradas simplificações para analisar o comportamento das estruturas, abordando os aspectos não lineares que mais influenciam nos resultados das deformações, como a fragilidade do concreto à tração. Observou-se, no entanto, que o concreto entre fissuras contribui para a resistência final do material.

O principal fator que interfere no cálculo da rigidez dos elementos é o efeito *tension stiffening*, que pode ser definido como o fenômeno que leva a um aumento na rigidez de uma seção de concreto armado, devido à transmissão de tensões na barra para o concreto, pela aderência, entre duas fissuras adjacentes (Morelli, 2017), observado Figura 1.

Figura 1 Efeito *tension stiffening* no gráfico carga-deslocamento



Fonte: Morelli (2017).

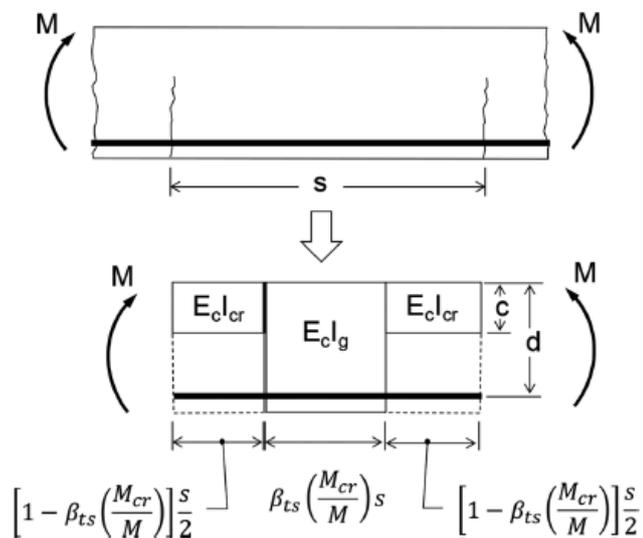
No gráfico, a reta tracejada representa o comportamento de uma barra isolada quando submetida a carregamentos, sendo esta deformação linear conforme aumento da carga. O comportamento dos elementos de concreto armado com aço está representado pela linha contínua. O primeiro trecho, retilíneo, mostra a resposta dos elementos não fissurados quando

submetidos aos carregamentos e sua maior inclinação, quando comparada a reta tracejada, deve-se pela rigidez da peça íntegra. O trecho seguinte é resultado do comportamento de elementos já fissurados.

Analisando o deslocamento horizontal entre ambas as curvas, observa-se a contribuição do concreto, efeito *tension stiffening*, para obtenção de valores menores de flechas aos obtidos com uma barra isolada, ainda que o concreto esteja fissurado. Portanto, a consideração da contribuição do concreto como nula, após atingida a deformação de fissuração, seria equivocada, sendo a resistência do mesmo na zona tracionada, entre fissuras, significativa.

Na representação da Figura 2, a peça está com duas fissuras e entre ambas há o concreto, que continua resistindo aos esforços de tração à medida em que o carregamento aumenta e o elemento sofre maiores deflexões. Também na Figura 2 está o esquema do quanto cada uma dessas parcelas contribui, sendo calculada pelos métodos simplificados como uma média ponderada das rigidezes. Os extremos são parte do concreto fissurado e a área central representa o concreto íntegro.

Figura 2 Modelo de fissuração simplificado para a flexão



Fonte: Bischoff (2020).

2.2 Análise de deflexões em vigas

A determinação de flechas em vigas de concreto armado pode ser realizada utilizando-se diferentes métodos de aproximação, a partir de parâmetros em comum, como a seção

transversal homogeneizada, momento de inércia efetivo e momento de fissuração, como no caso dos métodos estudados a seguir.

2.2.1 Método de Branson (1965)

O processo simplificado utilizado como base para a norma brasileira é o proposto por Branson (1965), que ensaiou vigas de concreto armado submetidas a cargas distribuídas uniformemente de curta duração, biapoiadas e de seções retangulares e em T. O autor considera um momento de inércia equivalente para o conjunto concreto e aço, representado na equação abaixo:

$$I_{eq} = \left(\frac{M_r}{M_{m\acute{a}x}} \right)^m \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_{m\acute{a}x}} \right)^m \right] \cdot I_{II} \leq I_c \quad (2.1)$$

I_c é o momento de inércia da seção bruta;

I_{II} é o momento de inércia da seção fissurada;

$M_{m\acute{a}x}$ é o momento fletor na seção mais solicitada;

M_r é o momento de fissuração (recomenda-se para lajes lisas a redução à metade);

m é um índice igual a 4 (análise em uma seção) ou igual a 3 (análise ao longo da peça).

A partir dos resultados experimentais, Branson (1965) definiu o índice $m=3$ considerando a variação do momento de inércia em todas as seções da viga, juntamente com o efeito *tension stiffening*.

As vigas ensaiadas por Branson apresentavam características típicas, com taxas de aço de 1,65%, relação I_c/I_{II} em torno de 2,20 e relação $M_{m\acute{a}x}/M_r$ da ordem de 2,50 (Melo, 2019 apud Bischoff, 2005). Analisando essas particularidades, segundo Gilbert (1999), os resultados de deflexões obtidos para taxas maiores que 0,60% são adequados com valores de I_{II} próximos aos valores de I_{eq} , já que nestes casos a parcela relativa ao efeito *tension stiffening* torna-se pouco influente.

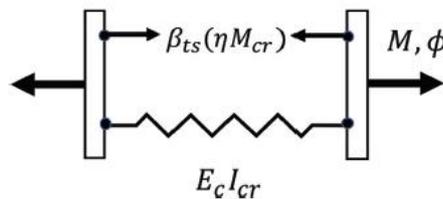
Quando se aplica o método para taxas de aço inferiores a 0,60%, em que os resultados de I_{II} são bem menores do que os de I_c e os valores dos momentos, atuante e de fissuração, ficam bem próximos (caso da maioria das lajes), a rigidez da peça pode ser superestimada. Isto ocorre, pois a parcela do efeito *tension stiffening* torna-se de grande influência, e considerações do M_r mesmo que pouco superestimadas resultam em rigidezes altas (Gilbert, 1999).

2.2.2 Método de Bischoff (2005, 2007, 2020)

Bischoff (2005, 2007, 2020) propôs uma expressão para o momento de inércia efetivo em função dos mesmos parâmetros adotados por Branson (1965), porém com considerações diferentes a quanto ao cálculo do momento de inércia efetivo.

A análise da influência do efeito de resistência do concreto no momento atuante, que é dado pela soma de duas parcelas, está representada na Figura 3. A parcela $E_c I_{cr}$ deve-se a contribuição da área de concreto fissurada e a parcela $\beta_{ts} (\eta M_{cr})$ é devida ao fenômeno *tension stiffening*.

Figura 3 Modelo do efeito *tension stiffening* resistente à flexão



Fonte: Bischoff (2020).

Nesta análise, tem-se o fator $\eta = 1 - (I_{cr}/I_g)$ e o valor de β_{ts} determinado em função da peça estar ou não fissurada (para uma resistência máxima do efeito, tem-se: $\beta_{ts} = 1$):

$$\beta_{ts} = \frac{M_a}{M_{cr}}, \text{ não fissurado} \quad (2.2)$$

$$\beta_{ts} = \frac{M_{cr}}{M_a}, \text{ fissurado} \quad (2.3)$$

M_a é o momento fletor na seção mais solicitada;

M_{cr} é o momento de fissuração.

Partindo do modelo apresentado, pode-se determinar o momento atuante em função da curvatura, como:

$$M_a = E_c I_{cr} \varphi_a + \beta_{ts} (\eta M_{cr}) \quad (2.4)$$

Reorganizando a expressão 2.4 em termos da curvatura (eq. 2.5), o autor obteve então a expressão 2.6 para o momento de inércia efetivo, quando a peça está fissurada. E quando não está fissurada: $I_e \approx I_g$.

$$\varphi_a = \frac{M_a}{E_c I_e} = \frac{M_a - \beta_{ts} (\eta M_{cr})}{E_c I_{cr}} \quad (2.5)$$

$$I_e = \frac{I_{cr}}{1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^2 \left(1 - \frac{I_{cr}}{I_g}\right)} \quad (2.6)$$

I_g é o momento de inércia da seção bruta;

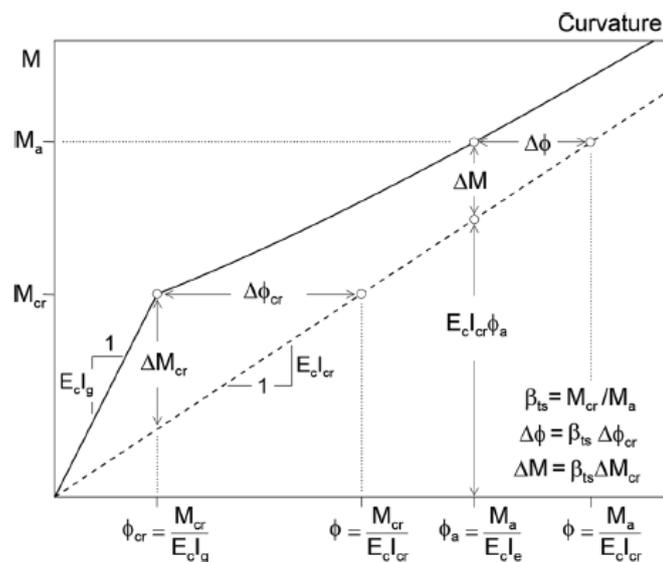
I_{cr} é o momento de inércia da seção fissurada;

M_a é o momento fletor na seção mais solicitada;

M_{cr} é o momento de fissuração.

Com base neste conceito, Bischoff obteve a curva característica do momento de serviço (M_a) em função da curvatura (φ_a) (Figura 4).

Figura 4 Gráfico do efeito da fissuração e da rigidez à tração do concreto



Fonte: Bischoff (2020).

Nas situações em que o elemento estrutural é submetido a tensões de retração antes de serem carregadas, ocorrem alterações na curvatura que contribuem para que a primeira fissura apareça na peça com um momento atuante ainda menor. Diante disso, o autor considera uma redução no momento de inércia fissurado, substituindo-o por M'_{cr} .

$$M'_{cr} = \frac{(f_r - f_{res} + \frac{P}{A}) I_g}{y_t} = M_{cr} \left(1 - \frac{f_r/3}{f_r} + \frac{P/A}{f_r}\right) \quad (2.7)$$

f_r é o módulo de ruptura do concreto;

f_{res} é a tensão de resistência a retração, calculada por $f_{res} = f_r/3$;

P/A é a compressão obtida pela força axial P na seção de área A ;

I_g é o momento de inércia da seção bruta;

y_t é a distância do centroide até a fibra mais tracionada.

Dessa forma, $M'_{cr} = 2/3M_{cr}$. Obtendo-se uma nova expressão para I_e .

$$I_e \approx \frac{I_{cr}}{1 - \left(\frac{\frac{2}{3}M_{cr}}{M_a}\right)^2 \left(1 - \frac{I_{cr}}{I_g}\right)}, \text{ para } M_a > \frac{2}{3}M_{cr} \quad (2.8)$$

$$I_e = I_g, \text{ para } M_a \leq \frac{2}{3}M_{cr} \quad (2.9)$$

I_g é o momento de inércia da seção bruta;

I_{cr} é o momento de inércia da seção fissurada;

M_a é o momento fletor na seção mais solicitada;

M_{cr} é o momento de fissuração.

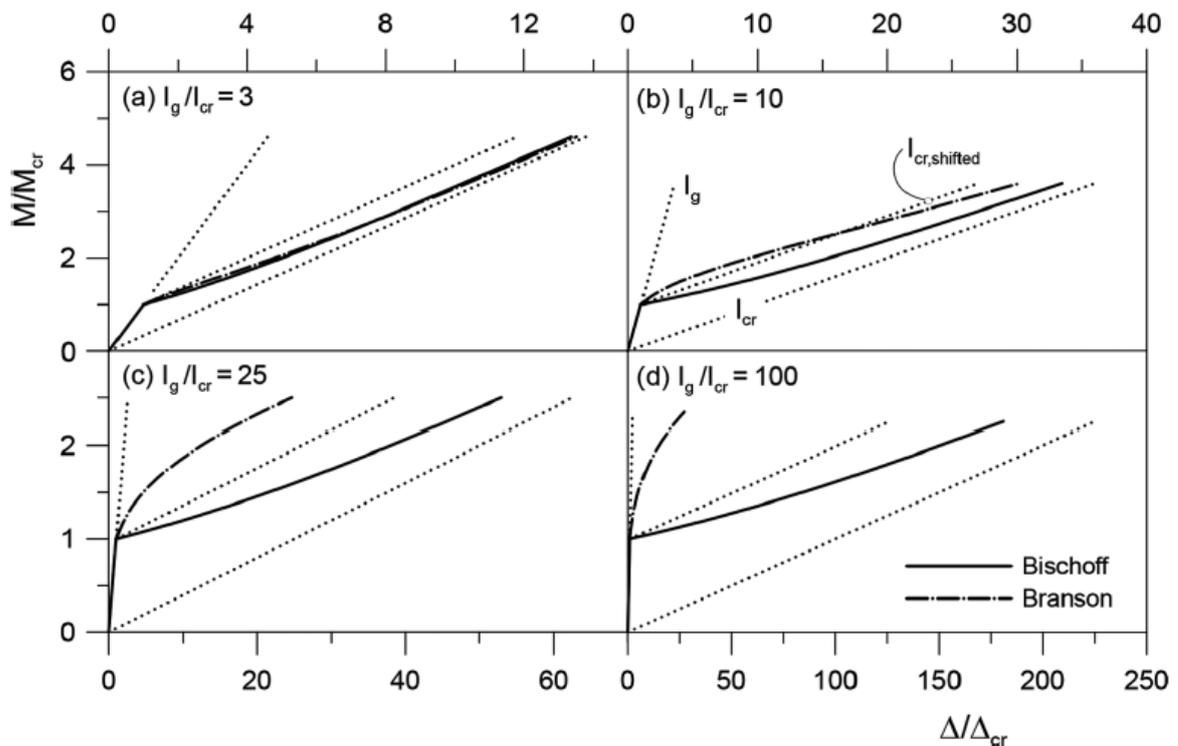
2.3 Comparações entre os métodos de Branson (1965) e Bischoff (2005, 2007, 2020)

Aplicando os métodos e variando a relação I_g/I_{cr} , Bischoff (2005, 2007) constatou que a expressão proposta por Branson (1965) resultava em valores satisfatórios para flechas quando a relação não passava de três, correspondente a taxas de aço superiores a 1,00%. Para taxas inferiores, a deflexão resulta em valores muito inferiores quando comparada ao novo método, como observa-se na 00, do momento atuante em função da flecha, normalizados.

Nos gráficos, as retas tracejadas representam o modelo de Branson (1965), eq. 2.1, as retas contínuas, o modelo de Bischoff (2005, 2007), eq. 2.6 (sem o momento de fissuração reduzido) e as retas pontilhadas, os limites que definem o estágio I e o estágio II.

A razão $I_g/I_{cr} = 3,00$ corresponde a uma taxa de 1,00% (viga moderadamente reforçada), $I_g/I_{cr} = 10,0$ representa taxas de 0,23% (lajes armadas em uma direção levemente reforçadas) e a relação $I_g/I_{cr} = 25,0$ está associada a taxas ainda menores (elementos de paredes, finos e inclinados). Situações com $I_g/I_{cr} = 100$ são hipotéticas, para demonstração da tendência dos métodos.

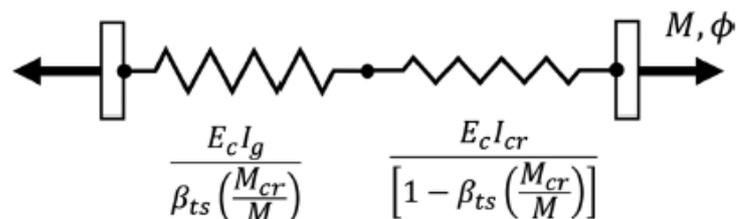
Figura 5 Gráfico da comparação de flechas pelos dois métodos



Fonte: Bischoff (2020).

O método definido por Bischoff (2005, 2007, 2020) representa uma média ponderada da flexibilidade para a peça fissurada e não fissurada, podendo ser visualizado também de acordo com um sistema de molas em série (Figura 6) em que ocorre uma tendência para uma maior flexibilização do elemento fissurado conforme o I_{cr} diminui em relação ao I_g .

Figura 6 Sistema de molas representando o método de Bischoff



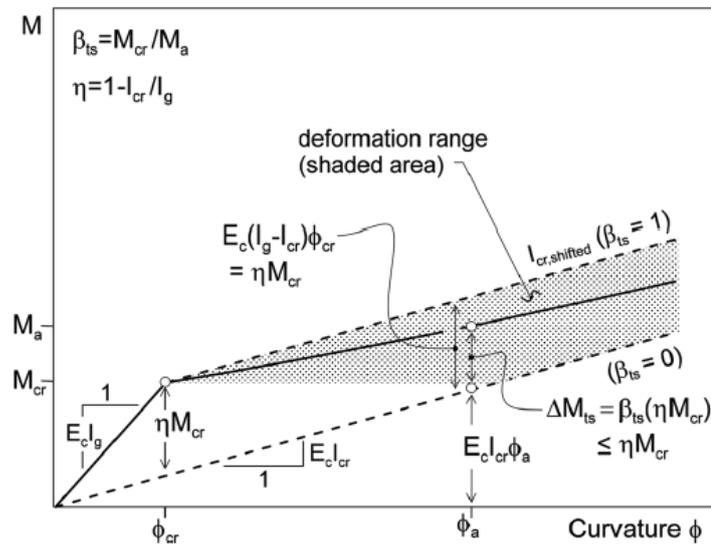
Fonte: Bischoff (2020).

Essa consideração resulta na ponderação do inverso do momento de inércia efetivo sendo o equivalente a soma ponderada dos inversos das inércias bruta e fissurada, como demonstrado na equação 2.10.

$$\frac{1}{I_e} = \left(\frac{M_{cr}}{M_{m\acute{a}x}}\right)^m \cdot \frac{1}{I_g} + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_{m\acute{a}x}}\right)^m\right] \cdot \frac{1}{I_{cr}} \geq \frac{1}{I_g} \quad (2.10)$$

Observa-se como resultado da aplicação do método de Bischoff (2005, 2007, 2020) o gráfico de deformação da Figura 7.

Figura 7 Gráfico das deformações pelo método de Bischoff

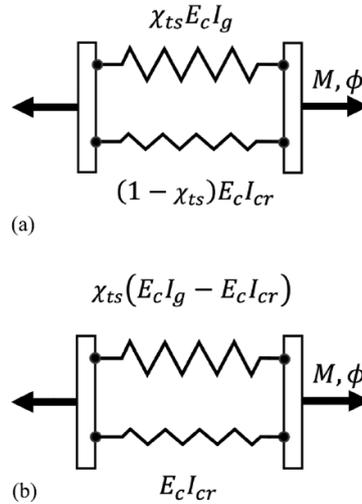


Fonte: Bischoff (2020).

Em contrapartida, segundo Bischoff, o método de Branson (1965) pode ser representado por um modelo de molas em paralelo, Figura 8(a) e eq. 2.11. Partindo da equação 2.1, com $m=3$ e o valor do fator *tension stiffening* $\chi_{ts} = (M_{cr}/M_a)^3$, tem-se:

$$E_c I_e = \chi_{ts} E_c I_g + (1 - \chi_{ts}) E_c I_{cr} \quad (2.11)$$

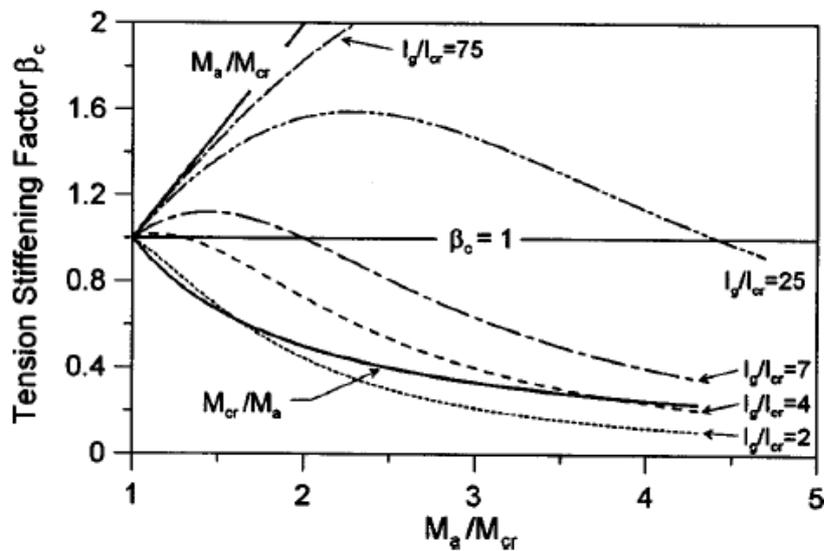
Figura 8 Sistema de molas representando o método de Branson



Fonte: Bischoff (2020).

A Figura 8(b) mostra a contribuição do efeito *tension stiffening*, que aumenta quanto maior for a razão I_g/I_{cr} (Bischoff, 2005, 2007, 2020). Podemos fazer a comparação com o esquema de molas da Figura 3, em que o fator ηM_{cr} restringe o resultado do fenômeno na equação de Bischoff. Pela Figura 9 observa-se a variação do componente do efeito para os diferentes I_g/I_{cr} , no método de Branson (1965).

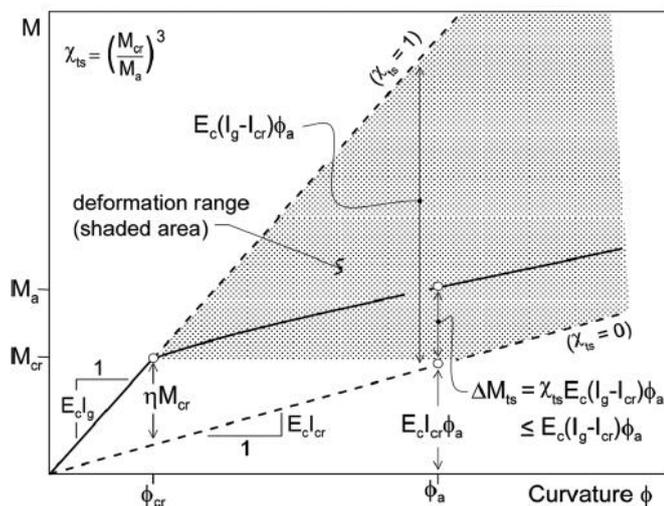
Figura 9 Componente do efeito *tension stiffening* aplicado na equação de Branson (1965)



Fonte: Bischoff (2005).

Pela Figura 10, a seguir, observa-se a aplicação do método de Branson (1965), que abrange uma área maior de deformação quando comparada a Figura 7.

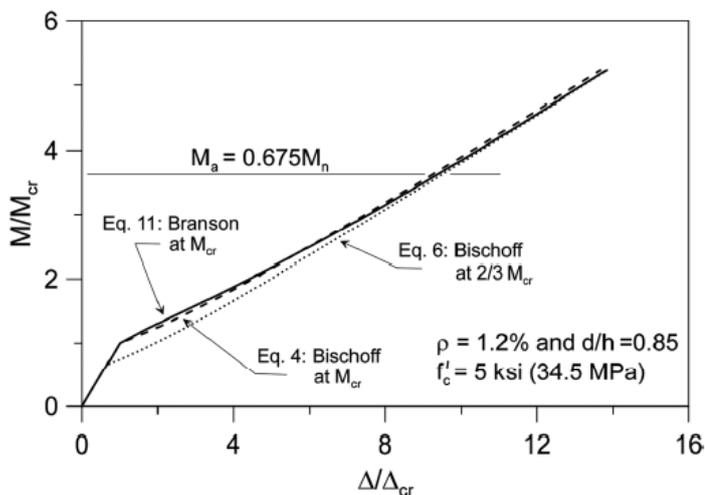
Figura 10 Gráfico das deformações pelo método de Branson



Fonte: Bischoff (2020).

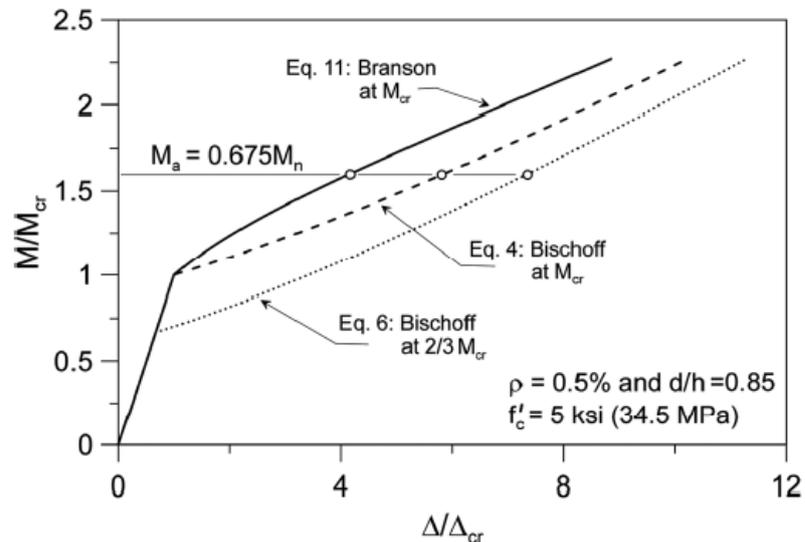
A comparação entre os métodos de Branson e de Bischoff, sem e com M_r reduzido (devido as tensões de retração no concreto), resultou nas curvas apresentadas nas figuras seguintes, que consideram diferentes taxas de armadura. Assim, pode-se verificar que há uma diferença mínima entre valores de deformação calculados para membros moderadamente reforçados, Figura 11 ($\rho = 1,20\%$).

Figura 11 Comparação das formulações para elementos moderadamente reforçados



Fonte: Bischoff (2020).

Figura 12 Comparação das formulações para elementos levemente reforçados



Fonte: Bischoff (2020).

Contudo, para elementos levemente reforçados ($\rho = 0,50\%$), Figura 12, essa diferença é significativa, aumentando em 41% do método de Branson (eq. 2.1) em relação ao método de Bischoff (2005, 2007) sem M_{cr} reduzido (eq. 2,6) e, em mais 37%, com relação ao método com M_{cr} reduzido (eq. 2,8). Um aumento total de 78% (Bischoff, 2020).

2.4 NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto

A norma brasileira define viga como elementos lineares em que a flexão é preponderante (item 14.4.1.1), elementos que apresentam comprimento longitudinal pelo menos três vezes a maior dimensão de sua seção transversal.

Quando se aplicam cargas na estrutura ocorrem deformações e deslocamentos de translação, rotação ou combinações de ambos. O cálculo de flechas (deformações de translação) em vigas é determinado por duas parcelas, a flecha imediata e a flecha diferida no tempo. Esse deslocamento imediato é obtido, principalmente, devido ao tipo e grandeza do carregamento aplicado, ao comprimento do vão, às condições de apoio da viga, assim como as propriedades geométricas e características dos materiais. Já o cálculo da flecha adicional diferida se dá pelas cargas de longa duração em função da fluência. A verificação dos elementos em serviço é feita no estágio II de deformação, em que as peças se encontram fissuradas.

A NBR 6118:2014 permite determinar a deformação específica utilizando a expressão de rigidez equivalente (Branson, 1965), dada no item 17.3.2.1.1, reproduzida abaixo.

$$(EI)_{eq,t0} = E_{cs} \left\{ \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \cdot I_c + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_a} \right)^3 \right] \cdot I_{II} \right\} \leq E_{cs} I_c \quad (2.12)$$

I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

I_{II} é o momento de inércia da seção fissurada de concreto no estágio II (eq. 2.18);

M_a é o momento fletor na seção mais solicitada;

M_r é o momento fissurado (eq. 2.13), recomenda-se reduzir à metade para barras lisas;

E_{cs} é o módulo de elasticidade secante do concreto (eq. 2.15).

Sendo:

$$M_r = \frac{\alpha f_{ct} I_c}{y_t} \quad (2.13)$$

$$f_{ct} = f_{ct,m} = 0,3 f_{ck}^{2/3}, \text{ para } f_{ck} \text{ de 20MPa a 50MPa} \quad (2.14)$$

$$E_{cs} = \alpha_i E_{ci} \quad (2.15)$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (2.16)$$

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}}, \text{ para } f_{ck} \text{ de 20MPa a 50MPa} \quad (2.17)$$

α é o fator que correlaciona aproximadamente a resistência à tração na flexão com a resistência à tração na tração direta ($\alpha = 1,2$, para seções T ou duplo T e $\alpha = 1,5$, para seções retangulares);

y_t é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada;

I_c é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto;

α_E é o parâmetro do agregado;

α_i é o parâmetro do módulo de deformação.

$$I_{II} = \frac{b x_{II}^3}{12} + b x_{II} \left(\frac{x_{II}}{2} \right)^2 + \alpha_e A_s' (x_{II} - d')^2 + \alpha_e A_s (d - x_{II})^2 \quad (2.18)$$

$$x_{II}^2 + \frac{2 \alpha_e}{b} (A_s + A_s') x_{II} - \frac{2 \alpha_e}{b} (A_s d + A_s' d') = 0 \quad (2.19)$$

$$\alpha_e = E_s / E_{cs}; \quad (2.20)$$

E_s é o módulo de elasticidade do aço;

E_{cs} é o módulo de deformação secante do concreto;

x_{II} é a posição da linha neutra (LN) na seção fissurada (eq. 2.19);

b é a largura da seção transversal;

A_s é a armadura de tração;

A_s' é a armadura de compressão;

d é a altura útil relativa à armadura de tração;

d' é a altura útil relativa à armadura de compressão.

É importante ressaltar que as equações apresentadas para obtenção da posição da LN e do momento de inércia fissurado são aplicáveis apenas para o caso de seções transversais retangulares, que são as estudadas neste trabalho.

A partir da rigidez equivalente pode-se aplicar a equação geral seguinte para a obtenção da flecha imediata:

$$\delta = \frac{K}{384} \frac{pl^4}{(EI)_{eq}} \quad (2.21)$$

K é um fator tabelado que depende da vinculação e do tipo de carregamento;

p é o carregamento;

l é o vão;

$(EI)_{eq}$ é a rigidez equivalente à flexão (eq. 2.12).

A flecha adicional diferida no tempo é calculada pela multiplicação do resultado da flecha imediata por um fator α_f , determinado por meio de expressões.

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1 + 50\rho'} \quad (2.22)$$

$$\rho' = \frac{A_s'}{bd} \quad (2.23)$$

A_s' é a armadura de compressão, no caso de armadura dupla;

b é a largura da seção transversal;

d é a altura útil;

ξ é um coeficiente função do tempo, obtido pela Tabela 1 ou calculado por:

$$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0) \quad (2.24)$$

$$\xi(t) = 0,68 (0,996^t)t^{0,32}, \text{ para } t \leq 70 \text{ meses} \quad (2.25)$$

$$\xi(t) = 2, \text{ para } t > 70 \text{ meses} \quad (2.26)$$

t o tempo, em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida;

t_0 a idade (meses) relativa à data de aplicação da carga de longa duração. Para parcelas da carga de longa duração aplicadas em idades diferentes:

$$t_0 = \frac{\sum P_i t_{0i}}{\sum P_i} \quad (2.27)$$

P_i representa as parcelas de carga;

t_0 é a idade em que se aplicou cada parcela P_i , expressa em meses.

O valor da flecha total deve ser obtido multiplicando a flecha imediata por $(1 + \alpha_f)$.

Tabela 1 Valores do coeficiente ξ em função do tempo

Tempo (t) meses	0	0,5	1	2	3	4	5	10	20	40	≥ 70
Coeficiente $\xi(t)$	0	0,54	0,68	0,84	0,95	1,04	1,12	1,36	1,64	1,89	2

Fonte: NBR 6118:2014 (item 17.3.2.1.2).

Para os valores de deslocamentos limite, a norma brasileira considera o tipo de efeito que ocorre na edificação e atribui valores a fim de proporcionar um comportamento adequado da estrutura em serviço. Os valores estão apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 Limites para deslocamentos NBR 6118:2014

Tipo de efeito	Razão da limitação	Exemplo	Deslocamento a considerar	Deslocamento-limite
Aceitabilidade sensorial	Visual	Deslocamentos visíveis em elementos estruturais	Total	$l/250$
	Outro	Vibrações sentidas no piso	Devido a cargas acidentais	$l/350$
Efeitos estruturais em serviço	Superfícies que devem drenar água	Coberturas e varandas	Total	$l/250^a$
	Pavimentos que devem permanecer planos	Ginásios e pistas de boliche	Total	$l/350 + \text{contraflecha}^b$
			Ocorrido após a construção do piso	$l/600$
Elementos que suportam equipamentos sensíveis	Laboratórios	Ocorrido após a construção do equipamento	De acordo com recomendação do fabricante do equipamento	
Efeitos em elementos não estruturais	Paredes	Alvenaria, caixilhos e revestimentos	Após a construção da parede	$l/500^c$ e 10 mm e $\theta = 0,0017 \text{ rad}^d$
		Divisórias leves e caixilhos telescópios	Ocorrido após a instalação da divisória	$l/250^c$ e 25 mm
		Movimento lateral de edifícios	Provocado pela ação do vento para combinação frequente ($\Psi_1 = 0,30$)	$H/1700$ e $H_i/850^e$ entre pavimentos f
		Movimentos térmicos verticais	Provocado por diferença de temperatura	$l/400^g$ e 15 mm
	Forros	Movimentos térmicos horizontais	Provocado por diferença de temperatura	$H_i/500$
		Revestimentos colados	Ocorridos após a construção do forro	$l/350$
		Revestimentos pendurados com juntas	Deslocamento ocorrido após a construção do forro	$l/175$
	Pontes rolantes	Desalinhamento de trilhos	Deslocamento provocado pelas ações decorrentes da frenagem	$H/400$
Efeitos em elementos estruturais	Afastamento em relação às hipóteses de cálculo adotadas	Se os deslocamentos forem relevantes para o elemento considerado seus efeitos sobre as tensões ou sobre a estabilidade da estrutura devem ser considerados incorporando-os ao modelo estrutural adotado.		

^a As superfícies devem ser suficientemente inclinadas ou o deslocamento previsto compensado por contraflechas, de modo a não se ter acúmulo de água.

^b Os deslocamentos podem ser parcialmente compensados pela especificação de contraflechas. Entretanto, a atuação isolada da contraflecha não pode ocasionar um desvio do plano maior que $l/350$.

^c O vão l deve ser tomado na direção na qual a parede ou a divisória se desenvolve.

^d Rotação nos elementos que suportam paredes.

^e H é a altura total do edifício e H_i o desnível entre dois pavimentos vizinhos.

^f Esse limite aplica-se ao deslocamento lateral entre dois pavimentos consecutivos, devido à atuação de ações horizontais. Não podem ser incluídos os deslocamentos devidos a deformações axiais nos pilares. O limite também se aplica ao deslocamento vertical relativo das extremidades de lintéis conectados a duas paredes de contraventamento, quando H_i representa o comprimento do lintel.

^g O valor l refere-se à distância entre o pilar externo e o primeiro pilar interno.

NOTAS

1 Todos os valores-limites de deslocamentos supõem elementos de vão l suportados em ambas as extremidades por apoios que não se movem. Quando se tratar de balanços, o vão equivalente a ser considerado deve ser o dobro do comprimento do balanço.

2 Para o caso de elementos de superfície, os limites prescritos consideram que o valor l é o menor vão, exceto em casos de verificação de paredes e divisórias, onde interessa a direção na qual a parede ou divisória se desenvolve, limitando-se esse valor a duas vezes o vão menor.

3 O deslocamento total deve ser obtido a partir da combinação das ações características ponderadas pelos coeficientes definidos na Seção 11.

4 Deslocamentos excessivos podem ser parcialmente compensados por contraflechas.

Fonte: NBR 6118:2014 (item 13.3).

2.5 ACI 318-19 – Building Code Requirements for Structural Concrete

As edições anteriores da norma americana ACI 318 utilizavam a expressão de Branson (1965) para determinação do momento efetivo de inércia. Sua mais recente atualização, edição de 2019, sugere uma nova abordagem considerando o estudo realizado por Bischoff (2005, 2007).

Para o cálculo do momento de inércia efetivo é utilizada, atualmente, a equação 2.8. Para se determinar os valores de momento de inércia fissurado (I_{cr}), momento fissurado (M_{cr}), momento de serviço (M_a) e momento de inércia da seção bruta (I_g) que compõem a nova fórmula, não tiveram alterações. Os parâmetros para o concreto também estão apresentados.

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \quad (2.28)$$

$$f_r = 0,623 \lambda \sqrt{f'_c} \quad (2.29)$$

$$E_c = \begin{cases} 4700\sqrt{f'_c} & \text{para } f'_c \leq 40MPa \\ (3320\sqrt{f'_c} + 6895) \cdot (\gamma_{conc}/2320)^{1,5} & \text{para } f'_c > 40MPa \end{cases} \quad (2.30)$$

λ depende do peso específico do concreto, para concretos de peso específico normal pode-se considerar $\lambda = 1$;

f_r é a resistência a ruptura do concreto;

I_g é o momento de inércia da seção bruta de concreto;

y_t é a distância do centro de gravidade da seção à fibra mais tracionada;

γ_{conc} é um fator que depende da densidade do concreto, para concretos com peso específico normal adota-se $\gamma_{conc} = 1$;

f'_c é a resistência característica à compressão do concreto;

Dessa forma, a flecha imediata é obtida por meio da eq. 2.31.

$$\delta = K \frac{Ml^2}{E_c I_e} \quad (2.31)$$

K é um fator que depende da vinculação e do tipo de carregamento;

M é o momento fletor na seção mais solicitada;

l é o vão;

E_c é o módulo de elasticidade do concreto;

I_e é o momento de inércia efetivo.

A determinação da flecha diferida ao longo do tempo é realizada da mesma forma que na norma brasileira, aplica-se o fator λ no resultado obtido pela equação 2.31.

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50\rho'} \quad (2.32)$$

ρ' é a taxa de armadura de compressão, quando utilizada;

ξ é o fator que depende do tempo.

A ACI 318 define a flecha total pela soma de duas parcelas, δ_L , referente à deflexão inicial da carga ativa e a parcela $\lambda_t \delta_{sus}$, multiplicação entre a deflexão inicial devida à carga sustentada e o fator de tempo calculado no tempo t .

Tabela 3 Limites para deslocamentos ACI 318

Tipo de elemento	Deslocamento a ser considerado	Deslocamento limite
Coberturas que não apoiem ou não estejam fixadas a elementos não estruturais que podem ser danificados por grandes deslocamentos	Deslocamento imediato devido à ação variável	$l/180^*$
Pisos que não apoiem ou não estejam fixados a elementos não estruturais que podem ser danificados por grandes deslocamentos	Deslocamento imediato devido à ação variável	$l/360$
Coberturas ou pisos que apoiem ou estejam fixados a elementos não estruturais que podem ser danificados por grandes deslocamentos	Parcela do deslocamentos total que ocorre depois da instalação dos elementos não estruturais (é dado pelo deslocamentos diferido mais o deslocamento imediato devido a qualquer ação variável de longa duração) [†]	$l/480^\ddagger$
Coberturas ou pisos que apoiem ou estejam fixados a elementos não estruturais que não são danificados por grandes deslocamentos		$l/240^\S$
<p>* Limite não destinado a salvaguardar contra empoçamentos. O empoçamento deve ser verificado através de cálculos adequados de deflexão, incluindo deflexões adicionais devido a água e considerando os efeitos a longo prazo de todas as cargas sustentadas, curvatura, tolerâncias de construção e confiabilidade das provisões para drenagem.</p> <p>† A deflexão a longo prazo deve ser determinada em concordância com 9.5.2.5 ou 9.5.4.2, mas pode ser reduzida pela quantidade de deflexão calculada para ocorrer antes da fixação de elementos não estruturais. Essa quantidade deve ser determinada com base nos dados de engenharia aceitos relacionados às características de deflexão-tempo dos membros semelhantes aos que estão sendo considerados.</p> <p>‡ Limites podem ser ultrapassados se medidas adequadas forem tomadas para prevenir danos aos elementos suportados ou conectados.</p> <p>§ Mas não maior que a tolerância dada para elementos não estruturais. O limite pode ser excedido se a curvatura for fornecida para que a deflexão total menos a curvatura não exceda o limite.</p>		

Fonte: ACI 318 (1989).

3 APLICAÇÃO DOS MÉTODOS SIMPLIFICADOS

3.1 Estudos realizados

Como meio de referência para aplicação dos diferentes métodos aproximados, foram considerados estudos comparativos já realizados com valores numéricos e testes experimentais.

3.1.1 Melo (2019)

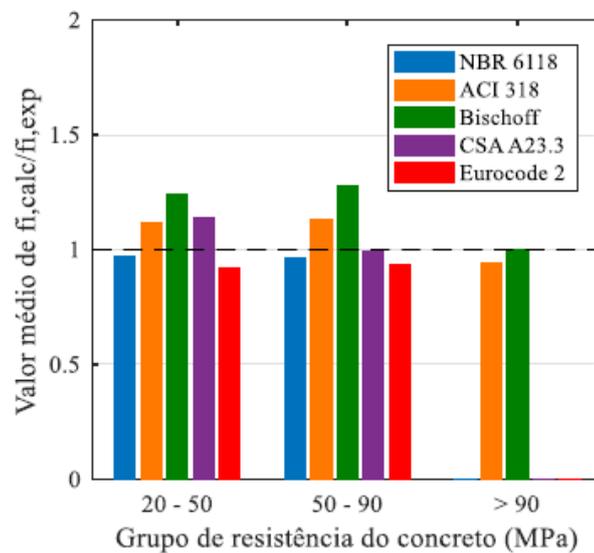
Melo (2019) analisou modelos experimentais e numéricos encontrados na literatura para deslocamentos de vigas biapoiadas, retangulares, com duas cargas concentradas em simetria, para peças de concreto armado com aço e reforçado por fibras poliméricas. Neste estudo, foram considerados apenas os resultados obtidos pela autora para vigas com armação de aço. A autora aplicou os modelos encontrados em um código computacional desenvolvido no MATLAB®, utilizando os seguintes métodos de análise:

- Branson (1965), apresentado no item 2.1.1 deste trabalho: utilizado na NBR 6118:2014, no ACI 318-14 e no CSA A23.2 (2007), para concreto armado com aço;
- Bischoff (2005): para concreto armado com aço;
- Bischoff e Gross (2011, apud Melo, 2019): adotado pela ACI 440 (2015), para concreto armado com PRF;
- Modelo Bilinear: utilizado pela Eurocode 2 (2004) para concreto armado com aço e para o CNR-DT 203 (2006) para elementos armados com PRF;
- Modelo Trilinear: utilizado pela norma canadense CSA S806 (2012); para concreto armado com PRF.

A autora comparou resultados de deflexões calculadas e obtidas experimentalmente em função do grupo de resistência à compressão do concreto (f_{ck}). É importante ressaltar que a autora estudou uma versão anterior do código americano, de 2014, que ainda aplicava o método de Branson (1965). Além disso, o método de Bischoff que ela estudou foi o referente a equação 2.6 deste trabalho, em que Bischoff ainda não havia considerado a redução do momento de fissuração. Foi utilizado para comparação, neste trabalho, o primeiro grupo com f_{ck} de 20MPa até 50MPa, observando-se os métodos de Branson (1965), equação 2.1, e Bischoff (2005), equação 2.6.

O gráfico representado na Figura 13 abrange todas as taxas de armadura estudadas pela autora. Observando o primeiro grupo de barras (f_{ck} de 20MPa até 50MPa), vemos que no geral, considerando todas as taxas de armadura, os métodos do ACI 318-14, que adotava o método de Branson (1965), o método de Bischoff (2005) e do CSA A23.3 resultaram em valores de flechas calculadas ($f_{i,calc}$) maiores do que as encontradas experimentalmente ($f_{i,exp}$). Os métodos da norma brasileira e do Eurocode 2 apresentaram as flechas calculadas menores que experimentais.

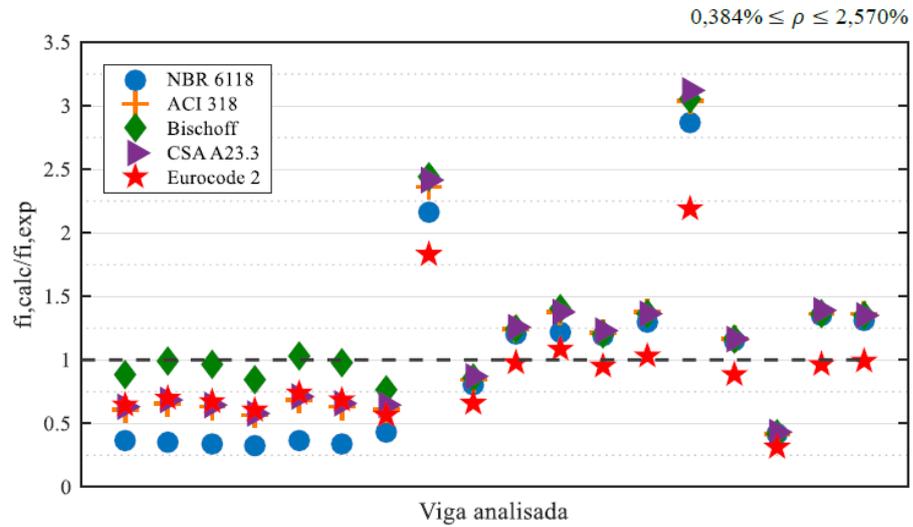
Figura 13 Valores médios de $f_{i,calc}/f_{i,exp}$ nas vigas armadas com aço



Fonte: Melo (2019).

Observa-se, na Figura 14, uma comparação entre valores obtidos da relação entre flechas calculadas e flechas experimentais ($f_{i,calc}/f_{i,exp}$) em função das taxas, estas dispostas em ordem crescente. Pode-se observar que, para taxas menores, os valores de flecha calculados são inferiores aos experimentais, visto que os pontos estão representados abaixo da reta tracejada de valor um. Dentre os métodos e modelos analisados, o método de Bischoff (2005) é o que mais se aproximou dos valores experimentais.

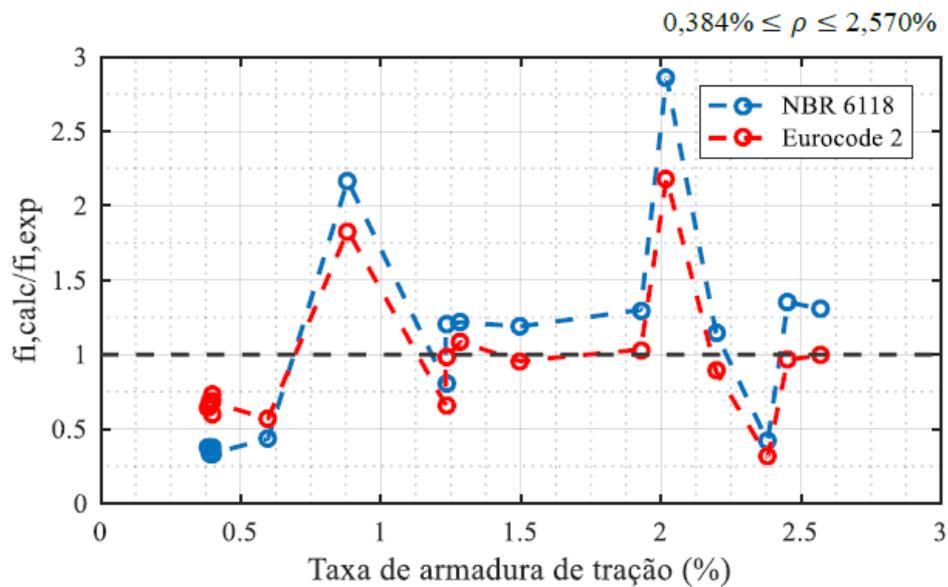
Figura 14 Comparação entre valores de $f_{i,calc}/f_{i,exp}$ para f_{ck} entre 20MPa e 50MPa



Fonte: Melo (2019).

Os resultados obtidos para a NBR 6118:2014 e para a Eurocode 2 se aproximaram pelo fato de ambos adotarem expressões similares para as propriedades mecânicas do concreto, apesar de considerarem procedimentos de cálculo diferentes para a determinação de flechas, como demonstrado na Figura 15.

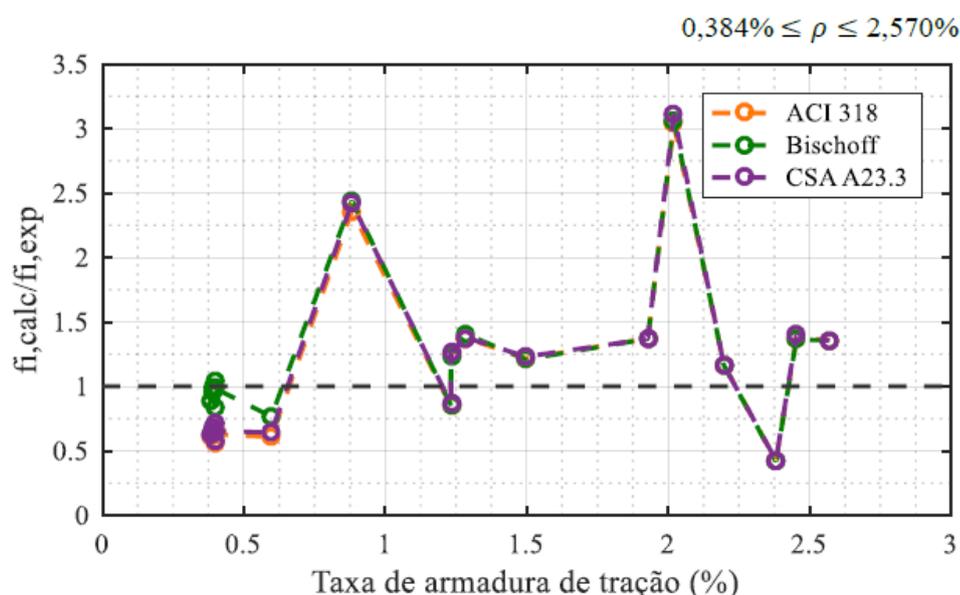
Figura 15 Comparação entre NBR 6118:2014 e Eurocode 2 (2004)



Fonte: Melo (2019).

Da mesma forma, o ACI 318-14 e a CSA A23.2 obtiveram uma proximidade devido aos procedimentos para a estimativa da rigidez, utilizando pequenas diferenças no cálculo das propriedades do concreto (Melo, 2019). O que pode ser observado na Figura 16.

Figura 16 Comparação entre ACI 318-14, Bischoff (2005) e CSA 23.2 (2014)



Fonte: Melo (2019).

Diante dos resultados, a autora destaca que para taxas de armadura menores que 0,6%, os métodos simplificados resultam em valores muito menores que os experimentais, subestimando o valor das flechas imediatas, exceto o proposto por Bischoff (2005). Para as taxas de armadura maiores que 0,6%, Melo (2019) concluiu que os modelos apresentam, no geral, valores bem próximos dos encontrados experimentalmente.

3.1.2 Junges (2011) e Junges e La Rovere (2012)

Junges e La Rovere (2011, 2012) estudaram 41 vigas divididas em grupos e subgrupos, abrangendo diferentes taxas de aço e tipos de carregamento; grupos com carga distribuída e outros com carga concentrada aplicada no centro da viga. As vigas eram biapoiadas e de seção retangular, algumas com e outras sem armadura superior. O trabalho das autoras envolveu a aplicação de métodos simplificados e modelos refinados de elementos finitos para o cálculo das flechas imediatas.

A comparação dos resultados foi feita mediante os seguintes métodos simplificados:

- Branson (1965): adotado pela NBR 6118:2007;
- Método Bilinear: adotado pelo CEB, em que a flecha é estimada por um valor intermediário entre o valor da flecha calculada com rigidez no estágio I e no estágio II, em função da curvatura.

Dentre os modelos de elementos finitos adotados estão:

- Programa computacional Analest: aplicando o modelo desenvolvido por Stamandinoli (2007), com análises da não-linearidade física a partir da discretização das seções em camadas (método das Lamelas, em que cada seção foi dividida em 20 camadas e o efeito *tension stiffening* foi considerado nas cinco camadas inferiores);
- Programa AVSer: modelo criado por Junges (2011), de elementos de vigas (MEV), com análises a partir de diagramas momento-curvatura, aplicado por meio da equação de Branson (1965) e pelo método Bilinear, em que as vigas foram discretizadas em elementos de 10 centímetros.

O programa Analest foi utilizado como base de comparação entre os outros métodos e modelo, já que demonstrou na literatura resultados satisfatórios para o cálculo das flechas, sendo o mais refinado dos modelos.

Foi realizada uma comparação com resultados obtidos de diversos ensaios experimentais levantados na literatura pelas autoras. Para a análise comparativa, foram selecionados neste estudo os resultados obtidos pelo grupo de vigas VB-G1. Os dados das propriedades dos materiais estão apresentados na Tabela 4 e os dados dos carregamentos e armaduras na Tabela 5. O parâmetro α representa a influência do efeito *tension stiffening*.

Tabela 4 Propriedades dos materiais das vigas do grupo VB-G1

f_{ck} (MPa)	f_{cm} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{cs} (MPa)	ϵ_0	M_r (kN.m)
25	31.6	2.565	23800	0.002	8.66

Fonte: Junges (2011).

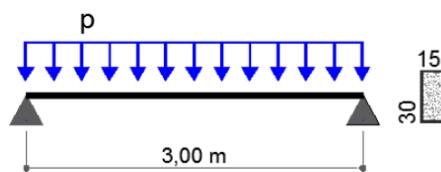
Tabela 5 Dados do carregamento e armação longitudinal das vigas do subgrupo VB-G11

Viga	P_{COP} (kN/m)	A_s		A'_s		ρ (%) (A_s)	α	ρ' (%) (A'_s)	$M_{COP} > M_r$ (% vão)
		barras	cm ²	barras	cm ²				
VB-G111	4.30	2 ϕ 8	1.00	-		0.22	0.03636	0	0.00
VB-G112	8.60	2 ϕ 10	1.57	-		0.35	0.04682	0	32.00
VB-G113	12.90	3 ϕ 10	2.36	-		0.52	0.06067	0	63.33
VB-G114	17.20	4 ϕ 10	3.15	-		0.70	0.07377	0	74.00
VB-G115	21.50	4 ϕ 12.5	4.92	-		1.09	0.10054	0	80.00
VB-G116	25.80	5 ϕ 12.5	6.15	-		1.37	0.11713	0	83.67

Fonte: Junges (2011).

O esquema da Figura 17, abaixo, mostra o tipo de carregamento aplicado e especifica características geométricas das vigas.

Figura 17 Geometria e tipo de carregamento das vigas do subgrupo VB-G11

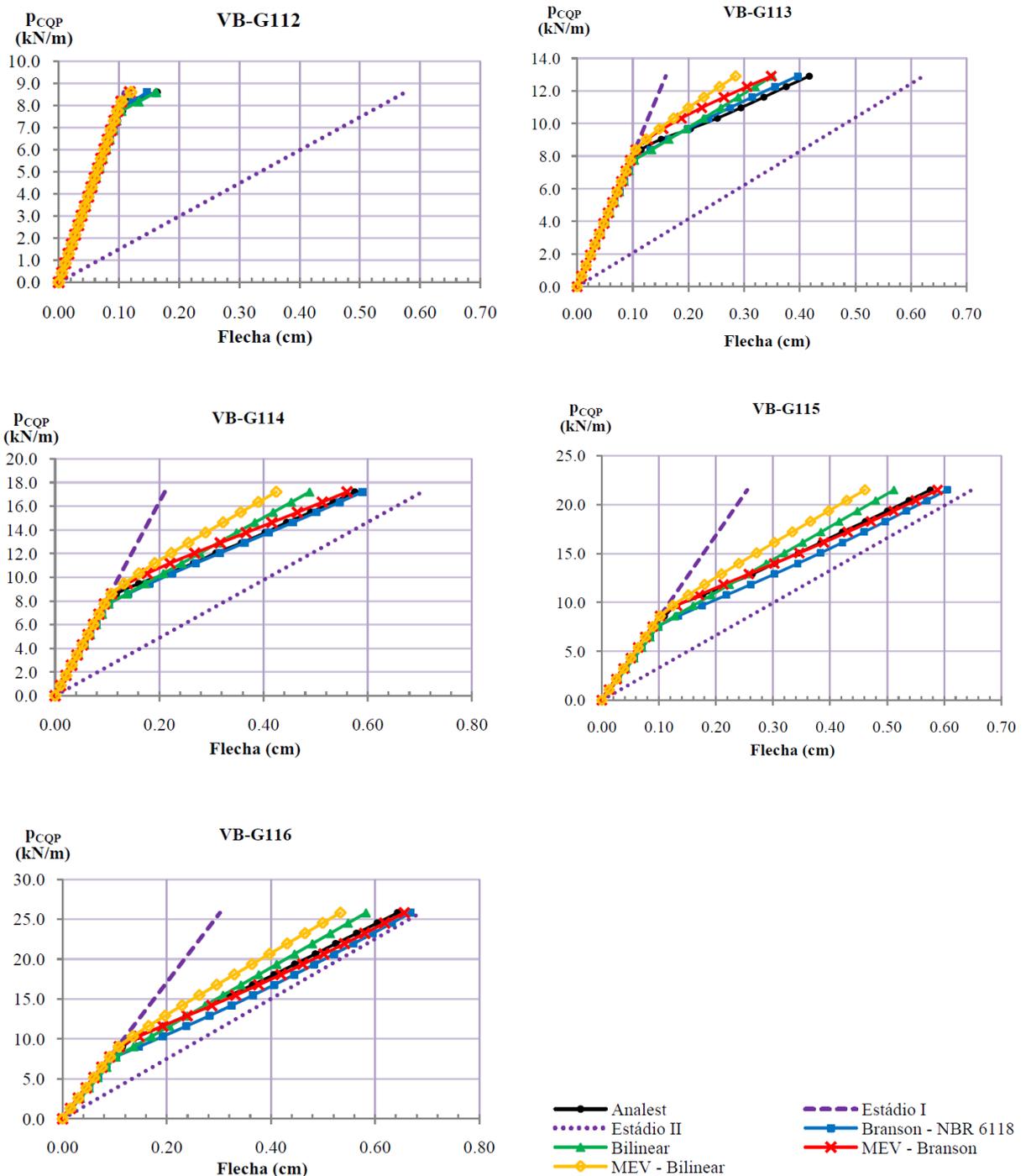


Fonte: Junges (2011).

Pela Figura 18 observa-se os resultados de flechas para vigas do subgrupo VB-G11, com carregamentos uniformemente distribuídos e apenas com armaduras positivas.

Pode-se verificar que as vigas com taxas de armadura e carregamentos mais elevados tem resultados que se aproximam mais das retas do estágio II. Além disso, o método de Branson (1965) e o modelo MEV-Branson apresentaram resultados próximos do programa Analest, exceto para a viga VB-G113, em que o modelo MEV mostrou valores menores (Junges e La Rovere, 2012). No resultado, não é mostrado o gráfico da viga VB-G111, pois não entrou no estágio II (Junges, 2011).

Figura 18 Gráficos carregamento versus flecha no meio do vão do subgrupo VB-G11



Fonte: Junges (2011).

Do estudo, concluiu-se que os valores obtidos para os métodos simplificados Branson-NBR e MEV-Branson foram bem próximos dos do modelo do Analest. Para o método simplificado Bilinear e o MEV-Bilinear, foram obtidas flechas menores que o modelo do Analest para todas as vigas, devido a maior rigidez dos modelos para a viga fissurada.

Partindo como referência os resultados do modelo Analest, Junges (2011), obteve diferenças percentuais entre os métodos, apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 Diferenças percentuais das flechas em relação ao modelo do Analest (%)

Viga	Branson NBR 6118	Bilinear	MEV Branson	MEV Bilinear
VB-G112	-10.29	-0.88	-27.79	-26.57
VB-G113	-5.02	-15.83	-16.40	-31.71
VB-G114	2.58	-15.06	-2.57	-26.18
VB-G115	5.08	-11.05	2.26	-19.86
VB-G116	3.88	-9.41	2.00	-17.07
VB-G117	-1.55	-12.71	-2.29	-19.02
VB-G118	0.35	-9.22	0.24	-15.22
Média	4.11	10.60	7.65	22.23

Fonte: Junges (2011).

A autora concluiu que o método de Branson-NBR foi o que apresentou menor variação dos resultados em relação ao programa Analest desenvolvido, com 4,11%. O MEV-Bilinear apresentou a maior variação dos resultados, em média 22,23%, e com valores para flechas sempre menores. Os modelos refinados MEV-Branson e MEV-Bilinear, tiveram médias intermediárias consideradas satisfatórias, respectivamente de 7,65% e 10,60%.

3.2 Análise de dados: Branson (1965) e Bischoff (2005, 2007, 2020)

Para uma avaliação inicial dos métodos de Branson (1965) e Bischoff (2020), foram estudadas as vigas VB-G113, com taxa de aço de 0,524% e VB-G116, com taxa de 1,364%, propostas por Junges (2011). Dessa forma, pode-se comparar os resultados com o estudo de Bischoff (Figura 11 e Figura 12).

Analisando os dados das vigas já apresentadas, é importante destacar que a NBR 6118 utilizada no estudo da autora é referente a versão de 2007. A NBR 6118:2014 apresenta alterações quanto ao cálculo do módulo de deformação secante do concreto, determinado pela equação 2.15. Dessa forma, é esperado alterações nos resultados obtidos para este parâmetro. A versão anterior adotava o valor definido pela equação abaixo:

$$E_{cs} = 0,85 \cdot E_{ci} \quad (3.1)$$

O método proposto por Bischoff (2020) foi aplicado neste estudo partindo-se dos parâmetros adotados pela norma brasileira para o aço e concreto. Como visto anteriormente no capítulo 2, ocorrem pequenas diferenças no cálculo da resistência média à tração (equações 2.14 e 2.29), do momento de fissuração (equações 2.13 e 2.28) e do módulo de elasticidade (equações 2.17 e 2.30) entre as normas, o que também pode ser confirmado na Tabela 7, abaixo. Assim, aplicou-se a formulação reproduzida na equação 2.12, da rigidez equivalente adotada pela norma brasileira, e a equação 2.8, do momento de inércia efetivo, que a atual ACI 318-19 adota.

Tabela 7 Dados geométricos da seção das vigas

Grupo	b (mm)	h (mm)	d (mm)	L (m)	$I_g \times 10^8$ (mm ⁴)
VB-G11	150	300	255	3,00	3,38

Fonte: Autora (2020).

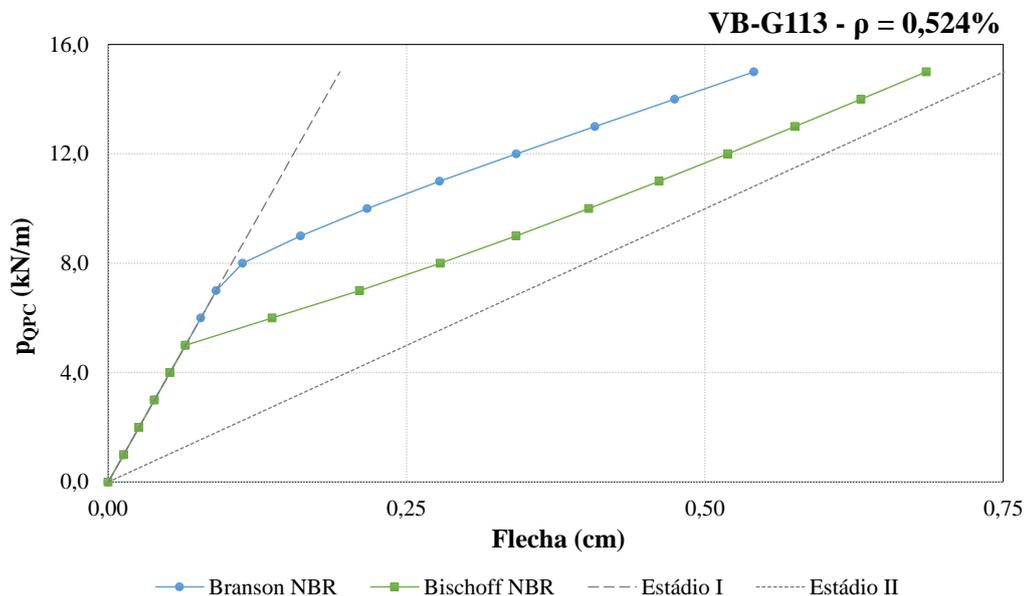
Tabela 8 Parâmetros adotados das vigas do subgrupo VB-G11

Parâmetros normativos	f_{ck} (MPa)	$f_{ct,m}$ (MPa)	E_{ci} (MPa)	E_{cs} (MPa)	α_e	M_{cr} (kN.m)
NBR 6118:2014	25,0	2,56	28000	24150	8,70	8,66

Fonte: Autora (2020).

A partir dos parâmetros obtidos de acordo com a NBR 6118:2014, apresentados na Tabela 8, foram realizados os cálculos das flechas na seção do meio do vão das vigas, para valores de carregamento variados. Dessa forma, foi possível traçar as curvas de tendência para cada taxa de armadura estudada. A obtenção da rigidez equivalente proposta pela norma brasileira, representada pela curva indicada na legenda por Branson-NBR, em azul, foi aplicada em comparação com a obtenção do momento de inércia efetivo proposto por Bischoff, sendo este no gráfico representado pela curva verde, Bischoff-NBR.

Figura 19 Gráfico da carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga VB-G113

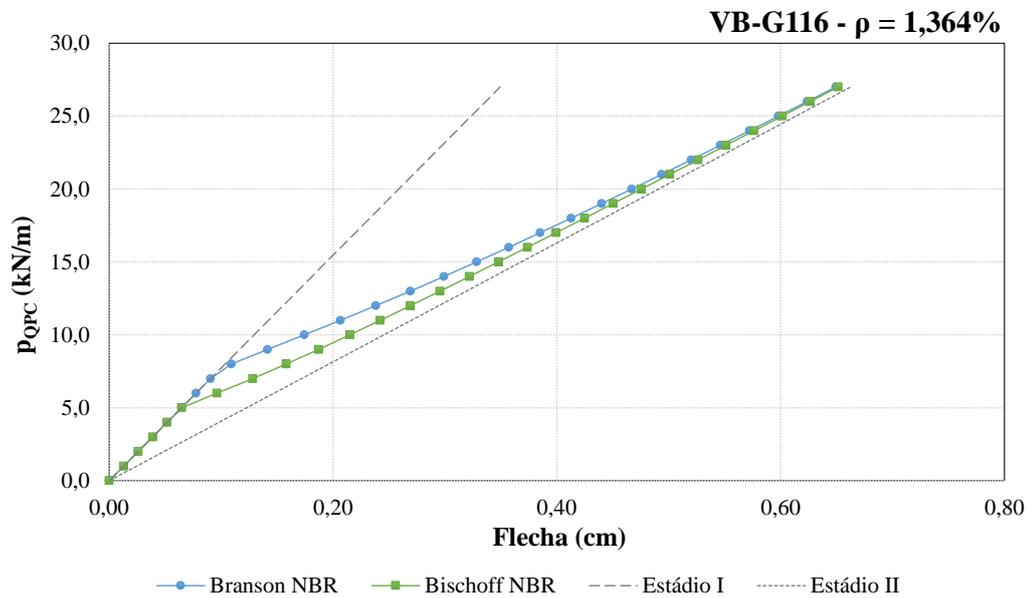


Fonte: Autora (2020).

Na Figura 19 (taxa de armadura de 0,524%) percebe-se grande variação dos valores de flechas em função dos momentos atuantes, sendo o método de Bischoff o mais conservador, com valores de flechas bem maiores para mesma aplicação de carregamento.

Já na Figura 20, a seguir, para taxa de armadura de 1,364%, os resultados são muito próximos.

Figura 20 Gráfico da carga aplicada versus flecha no meio do vão da viga VB-G116



Fonte: Autora (2020).

Pode-se comparar os gráficos obtidos acima com a Figura 11 e a Figura 12, apresentadas no estudo de Bischoff (2020), observando que, de fato, ocorrem discrepâncias nos valores de deflexões para taxas de armadura inferiores a 0,6%.

4 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES PARA FUTURAS PESQUISAS

Este trabalho apresentou uma revisão teórica entre dois métodos simplificados de obtenção de flechas imediatas em vigas de concreto armado, biapoiadas, com carregamento uniformemente distribuído e seção retangular. Foi possível demonstrar que para baixas taxas de aço, principalmente inferiores a 0,60%, o modelo de cálculo proposto por Bischoff (2005, 2007, 2020) e recomendado pela ACI 318-19, mostrou resultados de flechas consideravelmente maiores do que o método de Branson (1965), adotado pela NBR 6118:2014. Para taxas acima de 1,00% os métodos apresentaram valores muito próximos.

Para futuros trabalhos pode-se considerar uma análise mais ampla do método de Bischoff (2020) para vigas isostáticas com variações maiores de taxas de armadura, além de considerar a hiperestaticidade dos elementos lineares. No caso de programas de elementos finitos já desenvolvidos para a análise não-linear (Campos, 1993), pode-se aplicar a formulação de Bischoff (2020) analisando os resultados de forma mais refinada.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. *ACI 318-19: Building Code Requirements for Structural Concrete*. Michigan, 2019.

_____. *ACI 435R-95(03): Control of Deflection in Concrete Structures*. Michigan, 2019.

ARAÚJO, José Milton De. *Processos simplificados para cálculo de flechas de vigas de concreto armado*. Teoria e Prática na Engenharia Civil, n. 5, p. 1-10, Agosto, 2004.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento*. Rio de Janeiro, 2014.

BISCHOFF, Peter H. *Comparison of Existing Approaches for Computing Deflection of Reinforced Concrete*. ACI Structural Journal, V. 117, No. 1, January, 2020.

BISCHOFF, Peter H. *Effective Moment of Inertia for Calculating Deflections of Concrete Members Containing Steel Reinforcement and Fiber-Reinforced Polymer Reinforcement*. ACI Structural Journal, V. 104, No. 1, January-February, 2007.

BISCHOFF, Peter H. *Reevaluation of Deflection Prediction for Concrete Beams Reinforced with Steel and Fiber Reinforced Polymer Bars*. Journal of Structural Engineering, V. 131, No. 5, May, 2005.

FILHO, Paulo César Ferreira Dias. *Avaliação de Deformações em Vigas de Concreto Armado*. Araruna, 2017. 65 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Estadual da Paraíba, Araruna, 2017.

JUNGES, Elisabeth. *Estudo comparativo entre métodos simplificados e modelos de elementos finitos não lineares para o cálculo de flecha imediata em vigas de concreto armado*. Florianópolis, 2011. 361 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2011.

JUNGES, Elisabeth; LA ROVERE, Henriette Lebre. *Comparação entre métodos simplificados e modelos não lineares de elementos finitos para o cálculo de flecha imediata em vigas biapoiadas de concreto armado.*

MELO, Laila Monteiro Alves. *Avaliação de deslocamentos em vigas de concreto com armaduras de aço e de polímeros reforçados por fibras.* Maceió, 2019. 169 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2019.

MORELLI, Francesco et al. *Influence of Tension Stiffening on the Flexural Stiffness of Reinforced Concrete Circular Sections.* *Materials*: MDPI, v. 10, n. 6, p.669-669, 18 jun. 2017. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.3390/ma10060669>>. Acesso em: 18 jun. 2020.